LAHENDUSED 12.KLASS

1. **Vastus: 47 õpilast**

Lahendus:

Kui x õpilast õpib kõiki kolme keelt,

siis ainult saksa ja inglise keelt õpib $(132-x)$ õpilast
ainult saksa ja prantsuse keelt õpib $(72-x)$ õpilast ning
ainult inglise ja prantsuse keelt õpib $(68-x)$ õpilast.

Järelikult, ainult inglise keelt õpib $230-x-(132-x)-(68-x)=30+x$ õpilast,
ainult saksa keelt õpib $170-x-(132-x)-(72-x)=x-34$ õpilast,
ainult prantsuse keelt õpib $111-x-(68-x)-(72-x)=x-29$ õpilast.

Kuna kokku on gümnaasiumis 286 õpilast, saame koostada võrrandi:

$$x+132-x+72-x+68-x+30+x+x-34+x-29=286$$
$$x+239=286$$
$$x=47$$

47 õpilast õpib kõiki kolme keelt.

Hindamine:

Kolme keelt õppivate õpilaste arvu tähistamine	1p
Ainult saksa ja inglise, ainult saksa ja prantsuse ning ainult inglise ja prantsuse keelt õppivate õpilaste arvu avaldamine	2p
ainult inglise, ainult saksa ja ainult prantsuse keelt õppivate õpilaste arvu avaldamine	2p
võrrandi koostamine	1p
vastuse leidmine	1p
	7p

2. **Vastus: 2**

Lahendus:

Lahendus1:

Teisendame logaritme sisaldavat avaldist.

$$\log_q x_1^2 + \log_q x_2^2 + \log_q a^2$$

$$2\log_q x_1 + 2\log_q x_2 + 2\log_q a$$

$$2(\log_q x_1 + \log_q x_2 + \log_q a)$$

Kust

$$2\log_q x_1 x_2 a$$

Vastavalt Viete'i teoreemile on lahendite korrutis:

$$x_1 x_2 = \frac{q}{a} \Rightarrow$$

$$q = x_1 x_2 a$$

Siit saame teha asenduse logaritmi sisaldavasse avaldisse:

$$2\log_q q$$

Kuna logaritmi alus on võrdne logaritmitavaga, siis on logaritmi väärtus 1. Seega:

$$\log_q x_1^2 + \log_q x_2^2 + \log_q a^2 = 2$$

Lahendus 2:

Teisendame logaritme sisaldavat avaldist.

$$\log_q x_1^2 + \log_q x_2^2 + \log_q a^2$$

$$\log_q x_1^2 \cdot x_2^2 + \log_q a^2$$

Vastavalt Viete'i teoreemile on lahendite korrutis:

$$x_1 x_2 = \frac{q}{a} \Rightarrow$$

$$x_1^2 \cdot x_2^2 = \frac{q^2}{a^2}$$

Ning $\log_q \frac{q^2}{a^2} + \log_q a^2$,

Ja $\log_q q^2 - \log_q a^2 + \log_q a^2 = \log_q q^2 = 2$

Hindamine:

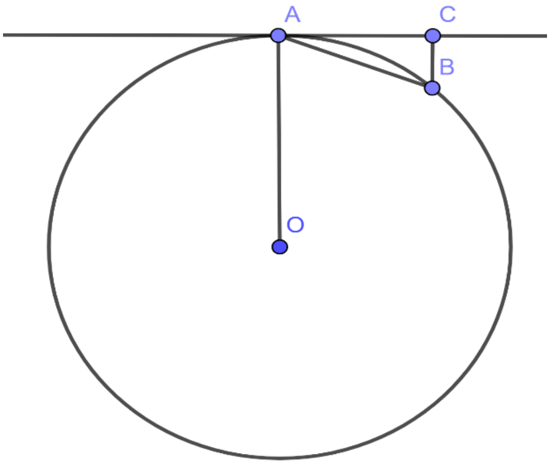
Logaritmi omaduste kasutamine	3p
Viete'i teoreemi teadmine ja avaldamine	2p
Õige lõppvastuse saamine	2p
	7p

Ainult õige vastuse eest anda 1p.

3. Vastus: $16\frac{1}{3}$ cm

<u>Lahendus</u>

<u>*Lahendus1:*</u>

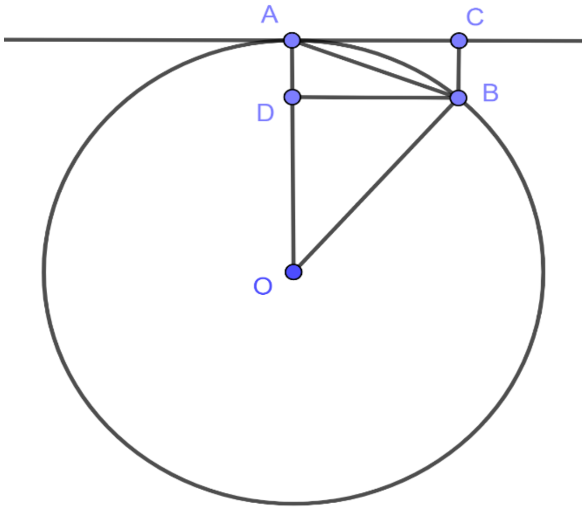


$AB = 10cm$

BC ja AC on risti, $BC = 3cm$

AO ja AC on risti (puutepunkti joonestatud raadius)

ΔABC kasutame Pythagorase teoreemi ning saame: $AC = \sqrt{100 - 9} = \sqrt{91}$cm.



Joonestame $BD \perp AO$:

$AD = BC = 3cm$

$DB = AC = \sqrt{91}$

Joonestame raadiuse OB.

Olgu $OB = x$ cm, siis $OD = x - 3$

ΔOBD kasutame Pythagorase teoreemi:

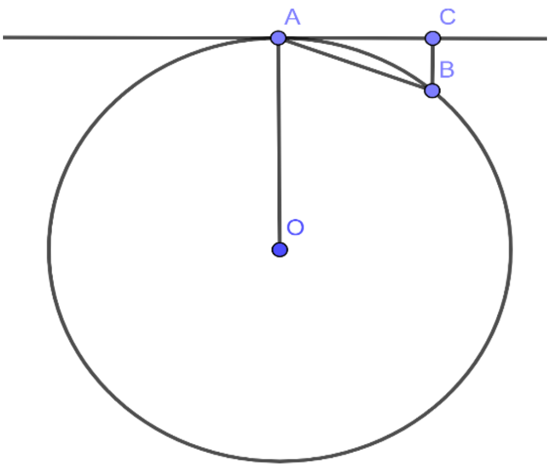
$$91 + (x-3)^2 = x^2$$

$$-6x + 100 = 0$$

$$x = \frac{50}{3} = 16\frac{1}{3}$$

Ehk raadius on $16\frac{1}{3}cm$.

<u>*Lahendus 2:*</u>



$AB = 10cm$

BC ja AC on risti, $BC = 3cm$

AO ja AC on risti (puutepunkti joonestatud raadius)

$\angle CBA = \angle BAO$ ($BC \parallel AO$)

Joonestame $OD \perp AB$

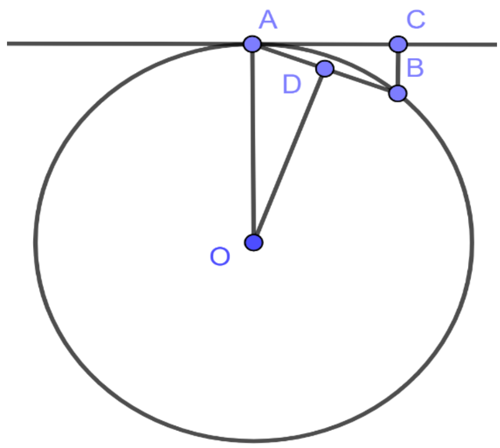
Kolmnurgad AOD ja BAC on sarnased

($\angle DAO = \angle ABC$ ja $\angle ADO = \angle ACB = 90°$)

ja $\frac{AO}{BA} = \frac{AD}{BC}$

$AD = \frac{10}{2} = 5cm$ (AD on võrdhaarse kolmnurga AOB kõrgus)

$\frac{AO}{10} = \frac{5}{3}$, kust $AO = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}(cm)$



Hindamine:

Lahendus1

Põhjendus, et $AO \parallel BC$ ($BC \perp AC, AO \perp AC$)	1p
AC leidmine	1p
Täisnurkse trapetsi AOBD kõrgusega BD konstrueerimine	1p
Külgede tähistamine	1p
Pythagorase teoreemi kasutamine	2p
Vastuse leidmine	1p
	7p

Lahendus 2

Põhjendus, et $AO \parallel BC$ ($BC \perp AC, AO \perp AC$)	1p
Märkamine, et $\angle CBA = \angle BAO$	1p
Kolmnurga ADO konstrueerimine	1p
Märkamine, et kolmnurgad AOD ja BAC on sarnased	1p
Põhjendus ja AD leidmine	1p
Külgede seose väljakirjutamine	1p
Vastuse leidmine	1p
	7p

4. Vastus: $\boldsymbol{n = 197}$

<u>Lahendus:</u>

$$202 = 101 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$$

Järelikult

$n, n+3$ või $n+5$ peab jaguma 5-ga

Ning $n, n+3$ või $n+5$ peab jaguma 101-ga.

Ehk $n = 101k$, või $n+3 = 101k$, või $n+5 = 101k$

Kui $k = 1$, siis

$n = 101$ (ei sobi, kuna sel juhul $n+3 = 104$ ja $n+5 = 106$, mõlemad ei jagu 5-ga)

$n+3 = 101$ (ei sobi, kuna sel juhul $n = 98$ ja $n+5 = 104$, mõlemad ei jagu 5-ga)

$n+5 = 101$ (ei sobi, kuna sel juhul $n+3 = 99$ ja $n = 96$, mõlemad ei jagu 5-ga)

Kui $k = 2$, siis

$n = 202$ (sel juhul $n+3 = 205$ – jagub 5-ga)

$n+3 = 202$ (ei sobi, kuna sel juhul $n = 199$ ja $n+5 = 204$, mõlemad ei jagu 5-ga)

$n+5 = 202$ (sel juhul $n+3 = 200$ – jagub 5-ga) ja $n = 197$

Kuna meid huvitab vähim n väärtus, siis $n = 197$:

$197 \cdot 200 \cdot 202$ jagub 2020-ga.

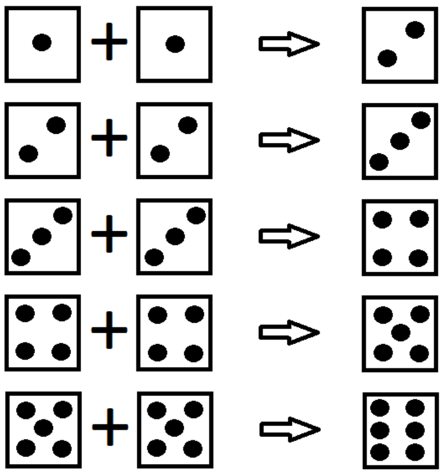
<u>Hindamine:</u>

2020 algteguriteks lahti kirjutamine	1p
Märkus, et üks tegur peab jaguma 101-ga	1p
Suurima algteguri võtmine vaatlemiseks	1p
Läbivaatamine, et n, n+3 ja n+5 = 101 ei sobi	2p
Leidmine, et n = 197 sobib	<u>2p</u>
	7p

<u>Märkus:</u> Ainult õige vastus - 2p.

5. **Vastus: a) 5610 kuldmünti; b) 256 käbi**

Lahendus:



Ruudustikus on kokku 15 ruutu. Vaatleme meetodit, kuidas ruudus olevate käbide arvu tõsta. Selleks, et mingis ruudus saaks olla kaks käbi, peab eelnevalt leiduma kaks ruutu, milles on üks käbi. Selleks, et mingis ruudus saaks olla kolm käbi, peab eelnevalt leiduma kaks ruutu, milles on kaks käbi jne. (vt kõrvalolevat joonist)

Vastavalt joonisele kulub ühele ruudule kahe käbi saamiseks kaks käbi, ühele ruudule kolme käbi saamiseks kulub neli käbi, ühele ruudule nelja käbi saamiseks kulub kaheksa käbi, ühele ruudule viie käbi saamiseks kuusteist käbi, ühele ruudule kuue käbi saamiseks kolmkümmend kaks käbi. Seega tasub kulude kokkuhoidmiseks käbide arv ruutudes hoida nii väikesena kui võimalik.

a) Selleks, et ruudustikule oleks võimalikult odavalt laduda 31 käbi, peab kahes ruudus olema kolm käbi, kaheteistkümnes ruudus olema kaks käbi ning ühes ruudus üks käbi. Selle tarbeks tuleb kokku osta $2 \cdot 4 + 12 \cdot 2 + 1 = 33$ käbi.

Leiame 33 käbi maksumuse kuldmüntides eeldusel, et käbide hinnad moodustavad aritmeetilise jada, mille esimene liige on 10 ning iga järgmine liige on 10 võrra suurem. Sellise jada 33 esimese liikme summa on:

$$S_{33} = \frac{a_1 + a_{33}}{2} \cdot 33 = \frac{10 + 330}{2} \cdot 33 = 5610$$

Seega 31 käbi ladumiseks kulub minimaalselt 5610 kuldmünti.

b) Selleks, et 48 käbi ladumiseks ruudustikule kuluks võimalikult palju käbisid, tuleb kaheksa ruutu täita kuue käbiga. Sellisel juhul kulub $8 \cdot 32 = 256$ käbi.

Hindamine:

Põhjendatud, kuidas mõjutab käbide arvu tõstmine kindlas ruudus käbide koguarvu ruudustikus	1p
Põhjendatud, mitu käbi on vaja selleks, et ruudustiku kindlas ruudus oleks 2/3/4/5/6 käbi (analoog lahenduses toodud joonisele)	1p
Aritmeetilise jada summa leidmine	1p
Käbide kogused ruudustiku ruutudes kummaski osaülesandes	2p
i) osa lõppvastus	1p
ii) osa lõppvastus	1p
	7p

Ainult õige vastuse eest kummasgi osaülesandes anda 1p.